



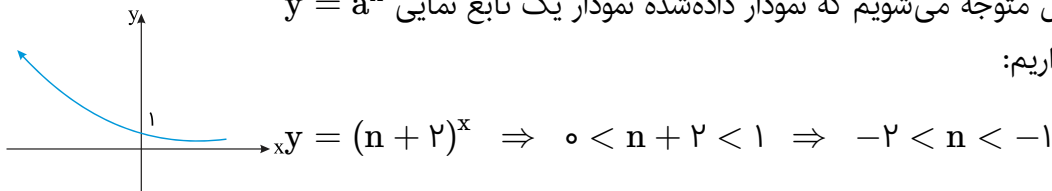
گزینه ۴

۱

نمودار یک تابع نمایی دارای ضابطه $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد به صورت زیر است:

باتوجه به نمودار داده شده در سؤال متوجه می شویم که نمودار داده شده نمودار یک تابع نمایی $y = a^x$

با $0 < a < 1$ است. در نتیجه داریم:



گزینه ۲

۲

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{x} = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^{-1} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \log_3 3 = -2$$

$$\log_{\frac{1}{x}} \sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = \log_{3^{-1}} 3^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} \log_3 3 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} > \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$$

$$\log_3 \frac{x}{10} = \log_3 0/3$$

$$\log_2 \frac{x}{10} = \log_2 0/3$$

$$\xrightarrow{0 < x < 1 \Rightarrow \log_3 x > \log_2 x} \log_3 0/3 > \log_2 0/3$$

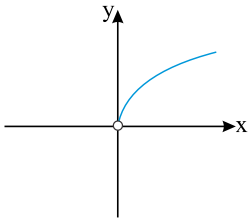
بنابراین مقایسه اصلی باید بین $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ و $\log_3 0/3$ انجام شود. داریم:

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = \log_{3^{-1}} \sqrt{3} = -\log_3 \sqrt{3} = \log_3 (\sqrt{3})^{-1} = \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq \log_3 0/57 > \log_3 0/3$$

بنابراین عدد $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$ از بقیه اعداد بزرگتر است.

$$2^{\log_2 x} = 2^{\log_{2^2} x} = 2^{\frac{1}{2} \log_2 x} = 2^{\log_2 \sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

پس باید $y = \sqrt{x}$ را در فاصله $(0, +\infty)$ رسم کنیم.



$$x^{\log x} = 10000 \xrightarrow{\text{لگاریتم از طرفین}} \log x^{\log x} = \log 10000 \Rightarrow (\log x)(\log x) = 4$$

$$(\log x)^2 = 4 \Rightarrow \log x = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100 \\ \log x = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} = 0.01 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 100.01$$

$$\begin{aligned} (\log 2)^2 + (\log 5)(\log 2^2 \times 5) &= (\log 2)^2 + (\log 5)(2 \log 2 + \log 5) \\ &= (\log 2)^2 + 2 \log 2 \log 5 + (\log 5)^2 = (\log 2 + \log 5)^2 = (\log 10)^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

برای تعیین دامنه تعریف تابع f ، تنها کافی است عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$12 - 2^{x+1} - 2^{4-x} \geq 0 \xrightarrow{\div 2} 6 - 2^x - 2^{3-x} \geq 0 \Rightarrow 6 - 2^x - \frac{2^3}{2^x} \geq 0$$

$$\xrightarrow{2^x=t>0} t + \frac{8}{t} - 6 \leq 0 \xrightarrow{\times t>0} t^2 - 6t + 8 \leq 0$$

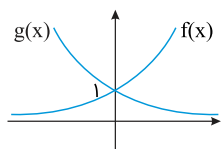
$$\Rightarrow 2 \leq t \leq 4 \xrightarrow{t=2^x} 2 \leq 2^x \leq 4 \Rightarrow 2^1 \leq 2^x \leq 2^2 \xrightarrow{\log_2} 1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow x \in \left[\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{1}, \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{2} \right] \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow b-a=2-1=1$$

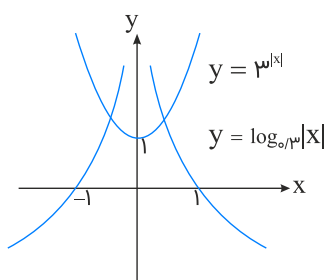
f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2^x(2^x + 1)}{2^x + 1} = 2^x$$

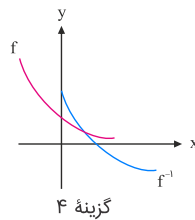
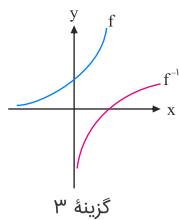
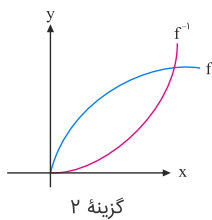
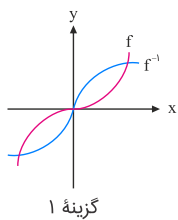
تابع $f(x) = 2^x$ یک تابع نمایی و افزایشی و تابع $g(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$ یک تابع نمایی کاهشی است. تمام توابع نمایی به صورت a^x از نقطه $A(0, 1)$ عبور می‌کنند.



همان‌طوری که در شکل می‌بینیم تعداد نقاط برخورد ۲ تا است.



بررسی گزینه‌ها:



$$\begin{aligned}\log_{15}^{45} &= \log_{15}^3 + \log_{15}^{15} = \log_{15}^3 + 1 = \frac{1}{\log_3^{15}} + 1 \\ &= \frac{1}{\log_3^5 + \log_3^3} + 1 = \frac{1}{a+1} + 1 = \frac{a+2}{a+1}\end{aligned}$$

نکته: تعداد ارقام عدد طبیعی a برابر است با $1 + [\log a]$ ، داریم:

$$\log 3^{1000} = 1000 \log 3 = 1000 \times 0.4771 = 477.1$$

بنابراین عدد 3^{1000} ، ۴۷۸ رقمی است.برای یافتن بیشترین مقدار $\log a \log b$ باید $a = b$ باشد و همچنین طبق فرض:

$$ab = 10 \Rightarrow a = b = \sqrt{10}$$

$$\log \sqrt{10} \times \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} (\log 10) \times \frac{1}{2} (\log 10) = \frac{1}{4}$$

سعی می‌کنیم طرفین تساوی را هم‌پایه کنیم:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^x = (x)^{\sqrt{x+3}} \Rightarrow x^{\frac{x}{2}} = (x)^{\sqrt{x+3}}$$

یک جواب قطعی و واضح این معادله، $x = 1$ است که به هر توان برسد یک می‌شود. برای پیدا کردن سایر جواب‌ها، حالا که پایه‌های دو طرف یکسان است، کافی است توان‌های دو طرف را برابر قرار دهیم:

$$\frac{x}{2} = \sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان دو می‌رسانیم}} \frac{x^2}{4} = x + 3 \Rightarrow x^2 = 4x + 12 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6, -2$$

دقت کنید! باید برگردیم و جواب‌ها را در معادله اولیه یعنی $\frac{x}{2} = \sqrt{x+3}$ چک کنیم، واضح است که $x = -2$ غیرقابل قبول است.

پس مجموع جواب‌های این معادله $1 + 6 = 7$ است.

برای پیدا کردن نقطه برخورد دو منحنی f و g کافی است، معادله $f = g$ را حل کنیم. قبل از آن، کمی ضابطه تابع g را ساده‌تر می‌کنیم تا پایه آن مانند تابع f ، عدد ۲ شود:

$$g(x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x} - 3 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^x - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 = \frac{1}{2^x} - 3$$

$$f = g \Rightarrow 2^{x+2} = \frac{1}{2^x} - 3 \Rightarrow 4 \times 2^x = \frac{1}{2^x} - 3$$

با تغییر متغیر $2^x = t$ داریم:

$$4t = \frac{1}{t} - 3 \Rightarrow 4t^2 + 3t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1, \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 2^x = -1 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

با جایگذاری $x = -2$ در یکی از توابع f یا g ، مختصات نقطه تلاقی به صورت $(-2, 1)$ خواهد شد و فاصله آن تا مبدأ مختصات

$$\sqrt{(-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

برابر است با: $\sqrt{5}$

ابتدا پایه‌های هر دو تابع را یکسان می‌کنیم:

$$f(x) = 4^{x+1} = (2^2)^{x+1} = 2^{2x+2}$$

$$g(x) = \frac{1}{8}(4^x) = \frac{2^{2x}}{2^3} = 2^{2x-3}$$

خطر بسیار بزرگ !!! ممکن است فکر کنید برای تبدیل $2x + 1$ به $2x - 3$ کافی است یک انتقال افقی ۴ واحدی داشته باشید. اما از آنجاکه ملاک انتقال افقی، تغییرات بر روی x است، ابتدا باید توابع f و g را به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{cases} f(x) = 2^{2x+2} = 2^{2(x+1)} \\ g(x) = 2^{2x-3} = 2^{2(x-\frac{3}{2})} \end{cases}$$

پس در واقع باید $x + 1$ به $x - \frac{3}{2}$ تبدیل شود که این اتفاق با یک انتقال افقی $2/5$ واحدی امکان‌پذیر است. باز هم دقت کنید! تغییرات بر روی محور x ها برعکس اعمال می‌شود، پس انتقال باید $2/5$ واحد در راستای جهت مثبت محور x ها، یعنی به سمت راست صورت گیرد.

در هر روز افزایش ۵ درصدی، ارزش سهم در $1/05$ ضرب می‌شود و در هر روز کاهش ۵ درصدی، ارزش سهم در $0/95$ ضرب می‌شود، بنابراین پس از طی ۶ روز ارزش سهم برابر است با:

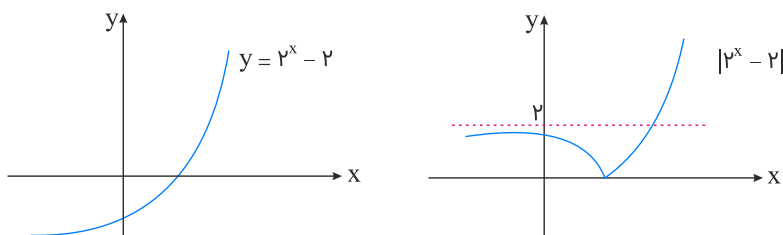
$$P = P_0 \times (1/05)^3 \times (0/95)^3 = P_0 (1/05 \times 0/95)^3$$

حالا کافی است، به بررسی بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از یک بودن عدد $1/05 \times 0/95$ بپردازیم:

$$1/05 \times 0/95 = \frac{105}{100} \times \frac{95}{100} = \frac{21}{20} \times \frac{19}{20} = \frac{399}{400} < 1$$

بنابراین ارزش اولیه سهم کاهش پیدا کرده است.

نمودار تابع $y = |2^x - 2|$ را رسم می‌کنیم:



برای اینکه تلاقی نمودار $y = |2^x - 2|$ و $y = k$ یک نقطه باشد، باید k بزرگ‌تر یا مساوی ۲ باشد.

$$f(x) = \frac{3^x + 2}{3^x + 6} = \frac{3^x + 6 - 4}{3^x + 6} = 1 - \frac{4}{3^x + 6}$$

باتوجه به اینکه برد تابع $y = 3^x$ را می‌دانیم:

$$3^x > 0 \Rightarrow 3^x + 6 > 6 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3^x + 6} < \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{2}{3} < \frac{-4}{3^x + 6} < 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{3} < 1 - \frac{4}{3^x + 6} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3} < f(x) < 1$$

مقدار تابع f هر عدد در بازه $(\frac{1}{3}, 1)$ می‌تواند باشد و در بین گزینه‌ها فقط $\frac{2}{3}$ در بازه $(\frac{1}{3}, 1)$ قرار دارد.

$$f(6) = 2 \circ \circ (a^{\frac{6}{b}}) = 54 \circ \circ \Rightarrow a^{\frac{6}{b}} = 27$$

$$f(12) = 2 \circ \circ (a^{\frac{12}{b}}) = 2 \circ \circ (a^{\frac{6}{b}})^2 = 2 \circ \circ (27^2) = 1458 \circ \circ$$

$$\begin{cases} f(-1) = \frac{-17 + 14}{4(-1)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{2^{-b+1}} = \frac{3}{4} \\ f(2) = \frac{34 + 14}{8} = 6 \Rightarrow \frac{a}{2^{2b+1}} = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}} \frac{2^{2b+1}}{2^{-b+1}} = \frac{\frac{3}{4}}{6} \Rightarrow 2^{2b+1+b-1} = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{3b} = 2^{-3}$$

$$\Rightarrow b = -1 \Rightarrow \frac{a}{2^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{3}{2^{-x+1}}$$

ازطرفی:

$$(1, 3) \in f(x) = \frac{3}{2^{-x+1}} \Rightarrow (3, 1) \in f^{-1}$$

$$\log_8 8 < \log_8 56 < \log_8 64 \Rightarrow 1 < \log_8 56 < 2 \Rightarrow -2 < -\log_8 56 < -1 \Rightarrow [-\log_8 56] = -2$$

$$\log_{\circ/2} (\circ/2)^{-1} < \log_{\circ/2} 2 < \log_{\circ/2} (\circ/2)^\circ \Rightarrow -1 < \log_{\circ/2} 2 < \circ \Rightarrow [\log_{\circ/2} 2] = -1$$

$$\log_5 5^{-1} < \log_5 \circ/75 < \log_5 5^\circ \Rightarrow -1 < \log_5 \circ/75 < \circ \Rightarrow [\log_5 \circ/75] = -1$$

$$A = -2 + (-1) + (-1) = -4$$

$$\begin{cases} \log E_1 = 11/8 + 1/5 M_1 & \text{زلزلۀ رودبار} \\ \log E_2 = 11/8 + 1/5 M_2 & \text{زلزلۀ بم} \end{cases}$$

طرفین این دو تساوی را از هم کم می‌کنیم تا $M_1 - M_2$ (یعنی اختلاف شدت زلزله‌ها) را ایجاد کنیم و به جایش $\circ/8$ بگذاریم:

$$\log E_1 - \log E_2 = (11/8 + 1/5 M_1) - (11/8 + 1/5 M_2) \Rightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = 1/5 (M_1 - M_2)$$

$$\xrightarrow{M_1 - M_2 = \circ/8} \log \frac{E_1}{E_2} = 1/5 \times \circ/8 = 1/2$$

$$\xrightarrow{\text{تعریف لگاریتم}} \frac{E_1}{E_2} = 10^{1/2} = 10 \times 10^{\circ/2} = 10 \times 10^{\frac{1}{5}} = 10 \sqrt[5]{10} = 10(1/6) = 16$$

تابع $y = 2^{x+2}$ همواره مثبت است، پس می‌توانیم آن را از قدر مطلق خارج کنیم:

$$2^{x+2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x} \Rightarrow 2 \times 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{2^x=A} 2A = \frac{1}{A}$$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1 \\ A = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = -\frac{1}{2} \times \end{cases}$$

معادله فقط یک جواب دارد.

$$\begin{aligned} (\log_{15} 5)^2 + \log_{15} 3 \log_{15} 75 &= (\log_{15} 5)^2 + \log_{15} 3 \log_{15} (3 \times 25) \\ &= (\log_{15} 5)^2 + \log_{15} 3 (\log_{15} 3 + \log_{15} 25) = (\log_{15} 5)^2 + (\log_{15} 3)^2 + (\log_{15} 3)(\log_{15} 25) \\ &= (\log_{15} 5)^2 + (\log_{15} 3)^2 + 2(\log_{15} 3 \log_{15} 5) = (\log_{15} 5 + \log_{15} 3)^2 = (\log_{15} 15)^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

چون تابع نمایی است، پس باید $m^2 - 4 = 0$ شود.

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow \text{تابع افزایشی} \\ m = -2 \Rightarrow f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \text{غیرنمایی} \end{cases}$$

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Rightarrow f(1) = \frac{3}{2}$$